VÍ DỤ TRANG 25 (PHẦN GREEN)

Tính tích phân đường:

$$\oint_C x^4\,dx + xy\,dy$$

trong đó C là đường biên của tam giác có các đỉnh:

$$(0,0), \quad (1,0), \quad (0,1)$$

và C được định hướng tương thích với miền (ngược chiều kim đồng hồ).

BƯỚC 1. Nhận diện "dấu hiệu dùng Green"

Ta có tích phân dạng:

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy$$

với:

$$P(x,y) = x^4, \quad Q(x,y) = xy$$

- C là đường kín
- Không cho tham số từng đoạn
- Miền D là miền phẳng đơn giản (tam giác)

$\Rightarrow$ Dùng định lý Green là con đường ngắn nhất.

BƯỚC 2. Xác định miền D

Miền D là tam giác vuông giới hạn bởi:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad y = 1 - x$$

Viết miền D theo dạng "đơn giản theo x":

$$D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x\}$$

BƯỚC 3. Viết công thức Green

Định lý Green:

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

BƯỚC 4. Tính các đạo hàm riêng

1. Tính $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

$$Q(x,y) = xy \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y$$

2. Tính $\dfrac{\partial P}{\partial y}$

$$P(x,y) = x^4 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

BƯỚC 5. Lập tích phân kép

Thay vào công thức Green:

$$\oint_C x^4\,dx + xy\,dy = \iint_D (y-0)\,dx\,dy = \iint_D y\,dx\,dy$$

BƯỚC 6. Viết tích phân kép có cận

Từ miền D:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} y\,dy\,dx$$

Nhớ kỹ:
Trong: tích phân theo y
Ngoài: tích phân theo x

BƯỚC 7. Tính tích phân (siêu chậm)

Bước 7.1: Tích phân trong theo y

$$\int_0^{1-x} y\,dy = \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} = \frac{(1-x)^2}{2}$$

Bước 7.2: Tích phân ngoài theo x

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-2x+x^2)\,dx$$

Tách từng phần:

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 1\,dx - \int_0^1 2x\,dx + \int_0^1 x^2\,dx\right)$$

Bước 7.3: Tính từng tích phân nhỏ

$$\int_0^1 1\,dx = 1, \quad \int_0^1 2x\,dx = 1, \quad \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

Thay vào:

$$= \frac{1}{2}\left(1 - 1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

KẾT LUẬN CUỐI CÙNG

$$\oint_C x^4\,dx + xy\,dy = \frac{1}{6}$$

TÓM TẮT "NHÌN LÀ BIẾT GREEN"

- Dạng $Pdx + Qdy$
- C kín
- Miền D dễ mô tả
- Tính $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}$
- Đổi sang tích phân kép → nhẹ não hơn đi từng cạnh